問題

空間座標において，原点と点$(1,0,0)$を結ぶ線分をxy平面上の直線$x=y$のまわりに一回転させたときできる曲面に関して以下の問に答えよ。

(1)　曲面上の点を(x,y,z)とする。x,y,zがすべて 0 以上のとき，
これらの関係を$z=f(x,y)$（x,yを用いた式）の形で表せ。

(2)　$f(x,y)$を(1)で得られたx,yの式とする。
領域V：$0\leq z\leq f(x,y)$，$0\leq x\leq\dfrac{1}{4}$，$0\leq y\leq\dfrac{3}{4}$と平面：$x=t$ $\left(0\leq t\leq\dfrac{1}{4}\right)$との切り口の面積$S(t)$を求めよ。

(3)　領域Vの体積を求めよ。

（2005　和歌山県立医科大学）

解答と解説

(1)略解

$x+y=t\ (z=0, 0\le t\le 1)$ と $x=y\ (z=0)$ の交点を C とすると，$\mathrm{C}\left(\dfrac{t}{2},\dfrac{t}{2},0\right)$

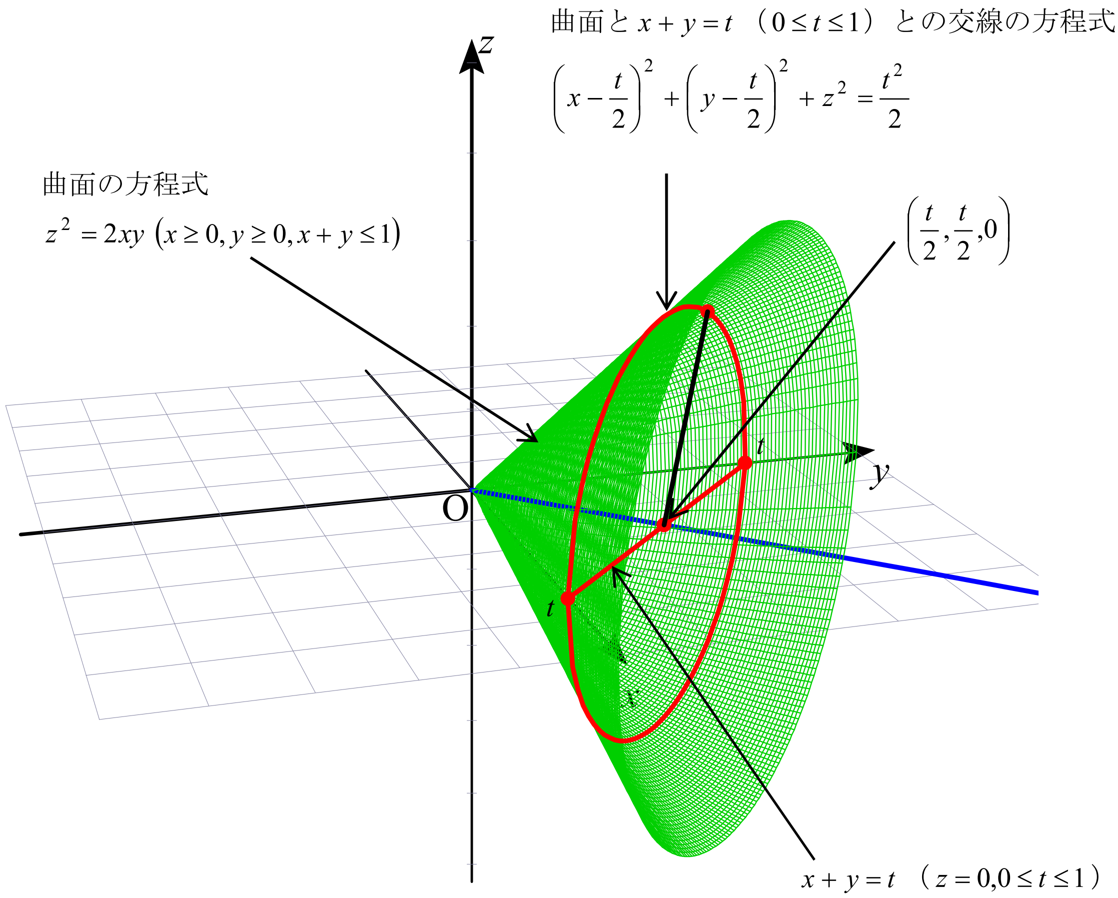
曲面と平面 $x+y=t$ との交線上の動点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると，動点 P は点 C を中心とする半径

$\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ の円を描くから，その円の方程式は，$\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{t}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{t^2}{2}$

これと $x+y=t$ より，$\left(x-\dfrac{x+y}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{x+y}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{(x+y)^2}{2}$　$\therefore z^2=2xy$

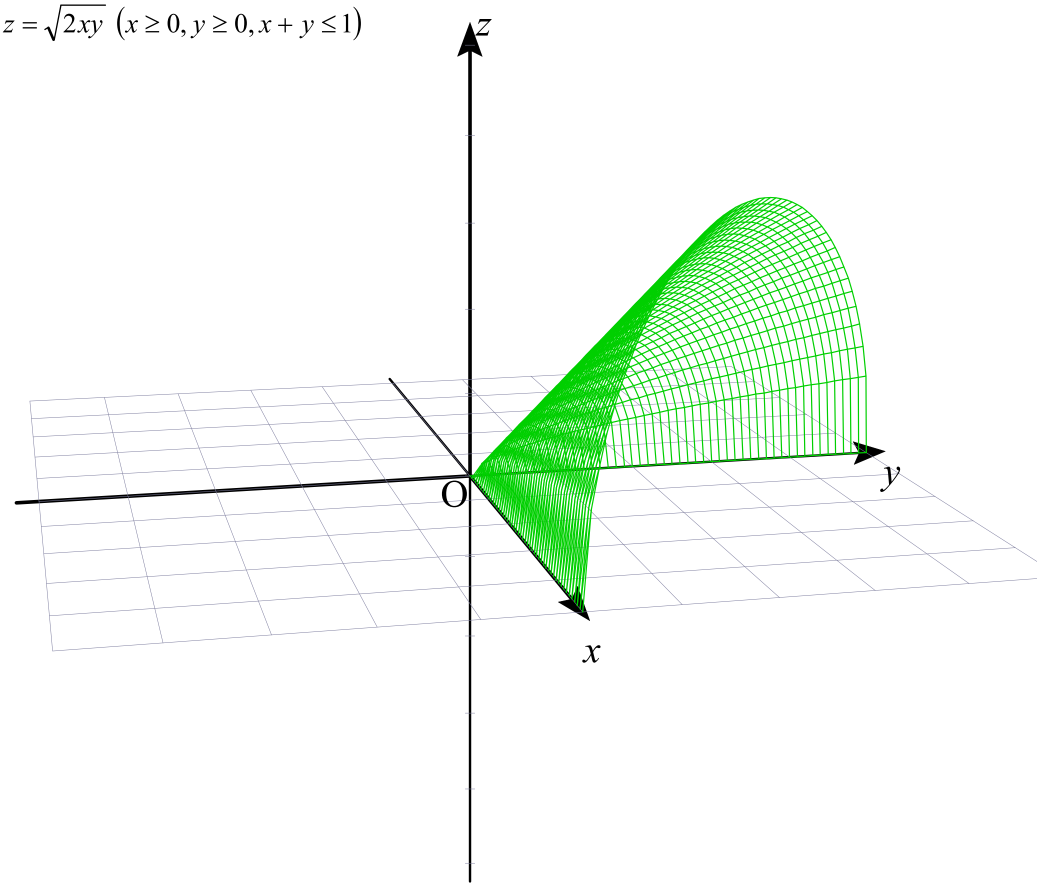
求めるのは，x,y,z がすべて 0 以上の場合だから，

求める曲面の方程式は，$z=\sqrt{2xy}$ （$x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1$）　・・・（答）



曲面の方程式

$z=\sqrt{2xy}\ \left(x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\right)$



(2)

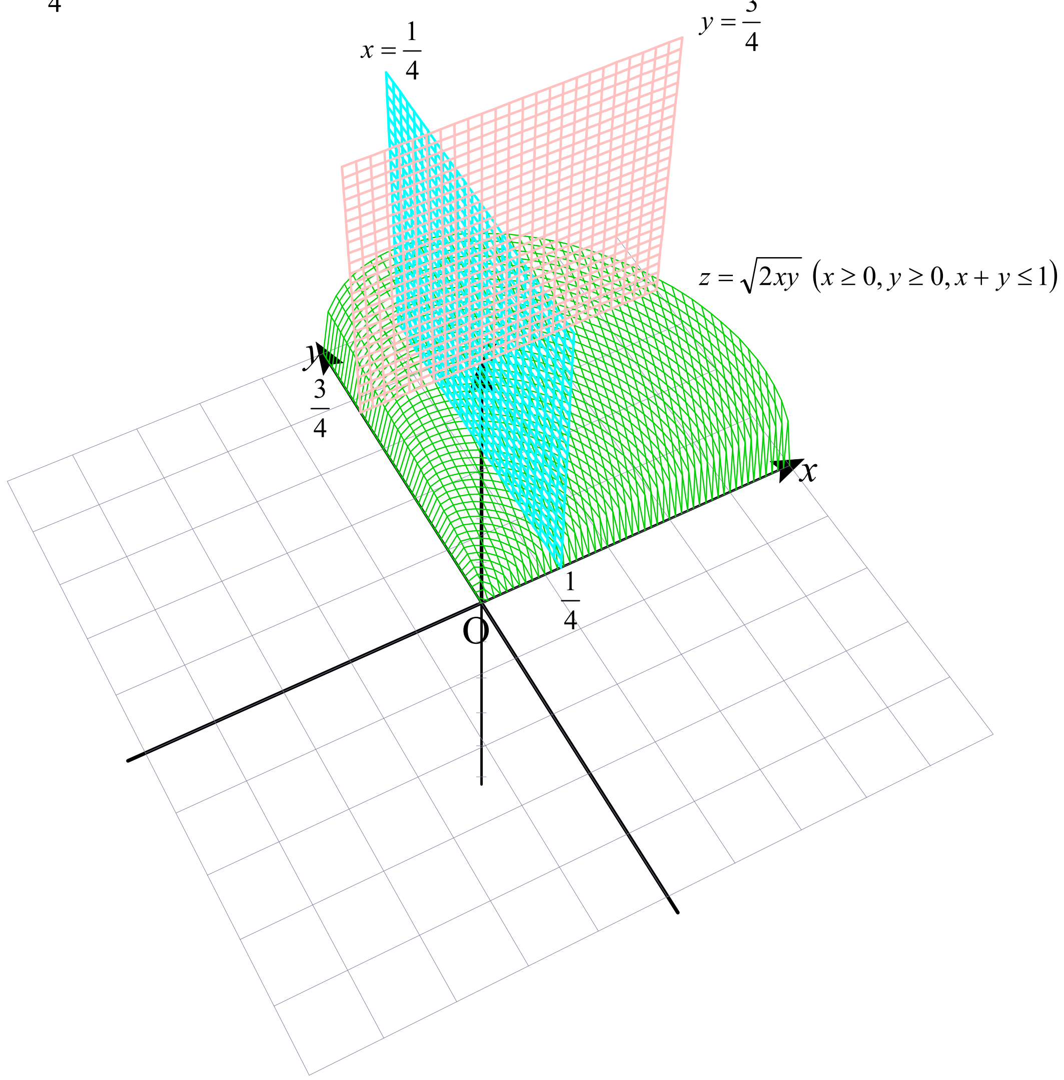
曲面 $z=\sqrt{2xy}$ と平面 $x=t$ （$0\le t\le\frac{1}{4}$）の交線の方程式は，$z=\sqrt{2ty}$ （$0\le y\le\frac{3}{4}$）

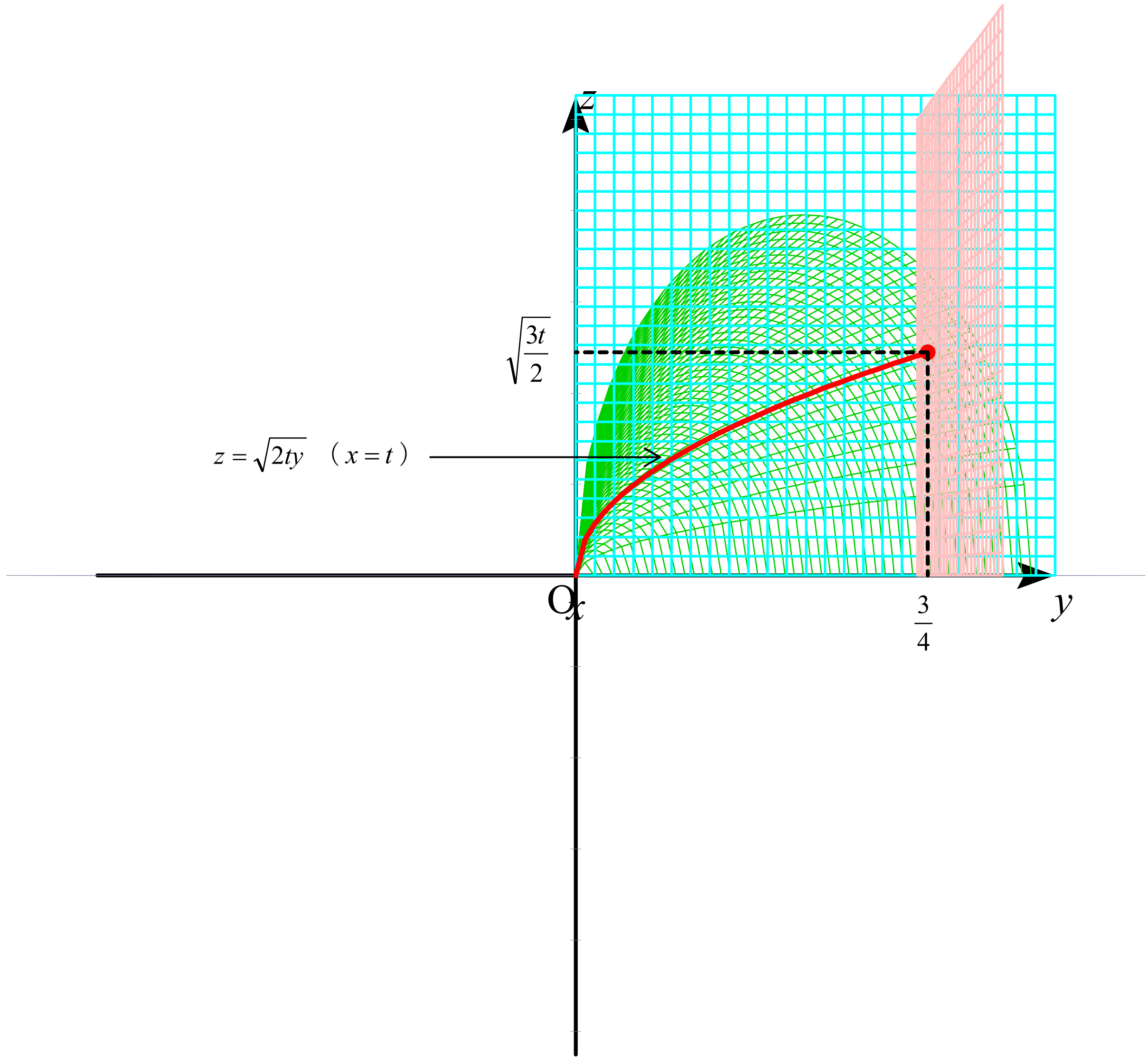
よって，領域 $0\le z\le\sqrt{2ty}$ （$0\le y\le\frac{3}{4}$）の面積，すなわち切り口の面積は，

$$S(t)=\int_0^{\frac{3}{4}}\sqrt{2ty}\,dy$$

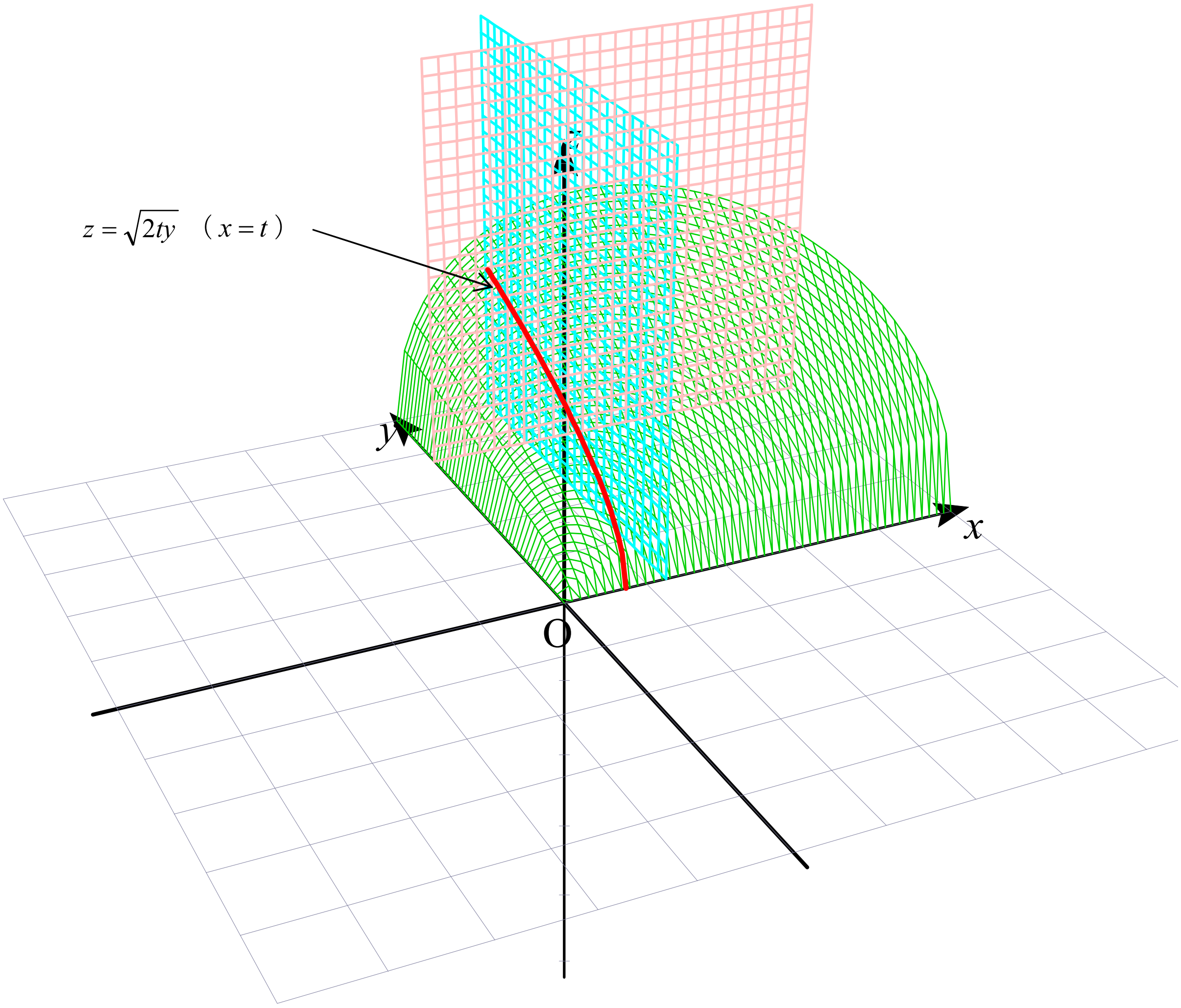
$$=\frac{2\sqrt{2t}}{3}\left[y\sqrt{y}\right]_0^{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{6t}}{4}\quad \cdot\cdot\cdot(答)$$





z
$\sqrt{\frac{3t}{2}}$
$z=\sqrt{2ty}$ （$x=t$）
O
x
$\frac{3}{4}$
y



(3)

$0 \le t \le \dfrac{1}{4}$ より，領域 V の体積は,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} S(t)dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{6t}}{4}dt$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\left[t\sqrt{t}\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{48}$$ ・・・(答)